Bei endlichem ε stellt der Ausdruck (29) ein modifiziertes Feld $F'(x;\varepsilon)$ dar (das sich allerdings nicht kovariant transformiert).
Man gewinnt F' aus F, indem man die Fourier-Komponente Q durch $Q\,f(|\vec{k}|\,\varepsilon)$ ersetzt. Man kann also F' auch aus einem Potential A' ableiten, das aus A durch denselben Prozeß hervorgeht. Im Limes $\varepsilon \to 0$ wird für jeden Punkt außerhalb der Weltlinie $F' = F$, dagegen für Punkte auf der Weltlinie $F' = \bar{F}$. Dies beruht darauf, daß der Grenzübergang abhängt von der Reihenfolge. Man muß zuerst den Punkt auf die Weltlinie rücken lassen und dann $\varepsilon \to 0$ gehen lassen.

Der hier beschriebene Limitierungsprozeß darf nicht verwechselt werden mit dem sogenannten λ-limiting-Prozeß, den Dirac bei der kanonischen Formulierung seiner Theorie angewandt hat [14]. Diese Formulierung benutzt nämlich nicht das tatsächliche Feld, sondern eine Schar von Feldern $A_\mu(x;s)$, die hinsichtlich der Ortsvariablen x der homogenen Gleichung $\Box A_\mu = 0$ genügen.

[14] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **180**, 1 [1942].

Zur Magneto-Hydrodynamik kompressibler Medien*

Von R. W. Larenz

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforschg. **10a**, 761—765 [1955]; eingegangen am 22. Juni 1955)

In einer konsequenten Theorie des kompressiblen Plasmas muß die Ladungstrennung berücksichtigt werden, besonders dann, wenn makroskopische Geschwindigkeiten auftreten, die mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar oder größer als diese sind. Es wird der Einbau der Ladungstrennung für ein zweikomponentiges Plasma durchgeführt und das System der magneto-hydrodynamischen Gleichungen so umgeformt, daß es nur noch 2 Größen enthält: das Vektorpotential und die Plasmageschwindigkeit.

In den letzten Jahren hat es sich mehr und mehr eingebürgert und als fruchtbar erwiesen, zur Beschreibung von Vorgängen in ionisierten Gasen eine makroskopisch-hydrodynamische Betrachtungsweise heranzuziehen, insbesondere dann, wenn sich das zu untersuchende Plasma über großräumige, kosmische Dimensionen erstreckt, eine Entwicklung, die wohl mit den Arbeiten Alfvéns begonnen hat [1]. Man denkt sich jede der Plasmakomponenten kontinuierlich über den Raum verteilt und für sich entsprechend ihrem Partialdruck einer Eulerschen Bewegungsgleichung gehorchend; gegenüber der gewöhnlichen Hydromechanik betreibt man also hier eine Mechanik *mehrerer* sich gegenseitig durchdringender Kontinua. Die einzelnen Bewegungsgleichungen sind dabei gekoppelt durch Reibungsglieder, die die Stöße der Plasmakomponenten untereinander repräsentieren, vornehmlich aber durch elektromagnetische Kräfte, die z. Tl. äußeren Ursprungs sein mögen, wesentlich aber durch die Verteilung und Strömung der Ladungsträger selbst bedingt sind. Die elektromagnetischen Größen sind ihrerseits wieder durch die Maxwellschen Gleichungen verbunden.

Die hydrodynamische Betrachtung hat den Vorzug, daß man mit ihrer Hilfe alle diejenigen Effekte mit guter Annäherung beschreiben kann, die wesentlich auf der Anwesenheit und dem Zusammenwirken einer *Vielheit* von Plasmateilchen beruhen, was mit Hilfe der Theorie der Bewegung eines einzelnen Ladungsträgers oder einer gaskinetischen Betrachtungsweise, wenn überhaupt, dann nur unter großen Schwierigkeiten möglich sein dürfte. Streng genommen wird mit der hydrodynamischen Betrachtungsweise die erste Näherung der gaskinetischen durchgeführt.

Die Grundgleichungen dieser makroskopischen Betrachtungsweise finden sich in für unsere Zwecke geeigneter Form nebst einigen prinzipiellen Bemerkungen in Arbeiten von Schlüter [2], so daß wir uns bei der Aufstellung der Ausgangsgleichungen kurz fassen können. Bisher hat man allerdings fast nur den Fall betrachtet, daß die Dichte der positiven

* Teilweise vorgetragen auf der Tagung der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft am 27. 4. 1953 in Bad Salzuflen.

[1] Zusammenfassende Darstellung: H. Alfvén, Cosmical Electrodynamics, Oxford 1950.

[2] A. Schlüter, Z. Naturforschg. **5a**, 72 [1950]; **6a**, 73 [1951].

Ladungsträger überall gleich derjenigen der negativen sei[3], und dies damit begründet, daß die hohen elektrostatischen Kräfte eine Ladungstrennung praktisch verhindern[4]. Für das Studium großräumig und langsam ablaufender Vorgänge, wobei langsam bedeutet, daß die auftretenden makroskopischen Geschwindigkeiten klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit im Plasma (dieser Begriff wird in der folgenden Arbeit näher präzisiert) sein sollen, wird die Gleichsetzung der Trägerdichten sicher gerechtfertigt sein. Man gelangt dann für sehr kleine Geschwindigkeiten in Analogie zur gewöhnlichen Hydromechanik zur Theorie des im Grenzfall inkompressiblen Mediums, mit der sich bereits zahlreiche Forscher beschäftigt haben und die meist unter dem Namen „Magneto-Hydrodynamik" im engeren Sinn bekannt ist, wobei häufig weitere Vereinfachungen, z. B. mit dem Postulat der strengen Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes eingeführt werden. Man darf jedoch nicht ohne weiteres erwarten, daß eine Theorie des inkompressiblen Mediums auch für *alle* schnell verlaufenden Vorgänge gelten kann, insbesondere solche, die etwa mit der Entstehung der überthermischen kosmischen Radiofrequenzstrahlung zusammenhängen. Wollte man in der Magneto-Hydrodynamik des kompressiblen Mediums a priori die Dichten der Ladungsträger verschiedenen Vorzeichens als stets einander gleich ansetzen, so würde man dem hydrodynamischen System mindestens einen Bewegungsfreiheitsgrad nehmen, und es müßte bewiesen werden, daß solchen zusätzlichen Freiheitsgraden keine wesentliche Bedeutung zukommt.

Wir werden daher die Partialdrucke und Dichten der Komponenten des Plasmas als verschieden zulassen und konsequent in die Theorie einbauen, wobei wir uns der Übersichtlichkeit halber auf ein vollständig ionisiertes Gas beschränken, das nur aus Elektronen und Ionen einheitlicher Masse besteht. Dabei ist es unser Bestreben, die Vielzahl von Variablen durch geeignetes Zusammenfassen von Gleichungen zu vermindern. Wegen der Nichtlinearität der Gleichungen gelingt dies für den kompressiblen Fall nur für nicht zu große Dichteschwankungen. Es wird sich zeigen, daß der Ablauf von Vorgängen in Plasmen sowohl im inkompressiblen wie im kompressiblen Fall im wesentlichen als Wechselwirkung von nur zwei Vektorgrößen beschrieben werden kann. Der Nachweis, daß Ladungstrennung überhaupt auftreten kann und damit der Einbau derselben in die Theorie notwendig ist, soll in der folgenden Arbeit erbracht werden.

§ 1. Die Grundgleichungen

Das vollständig ionisierte Gas bestehe aus 2 Arten von Ladungsträgern entgegengesetzter Ladung, die wir kurzweg als Ionen (Index i) und Elektronen (Index e) bezeichnen wollen, wie es für die meisten Probleme unmittelbar zutrifft. (Die „Elektronen" können also etwa für Zwecke der Erforschung der untersten Ionosphärenschichten auch negative Ionen sein.) Im räumlichen und zeitlichen Mittel sei das Gas elektrisch neutral; d. h. die gemittelten Teilchendichten N der Plasmakomponenten sind gleich einer mittleren (Ruhe-) Dichte N_0.

Da wir Hydromechanik zweier sich mit wechselnder Dichte gegenseitig durchdringender Medien treiben, müssen wir konsequenterweise auch verschiedene Temperaturen für die beiden Plasmakomponenten zulassen, wenn wir nicht lokalen, unendlich starken Wärmeaustausch zwischen Ionen und Elektronen fordern wollen. Wärmeaustausch ist aber im allgemeinen ebenso wie Wärmeleitung, Strahlung und Reibung ein mit Entropievermehrung verbundener Prozeß. Strömungsvorgänge, bei denen Entropiezunahme eintritt, wollen wir aber ausschließen, so daß wir Ionen- und Elektronentemperatur T_i bzw. T_e gesondert einführen müssen. Wir gewinnen dabei u. U. Einsichten über Vorgänge bei extremer Abweichung vom Temperaturgleichgewicht zwischen den Plasmakomponenten, wie sie z. B. im astrophysikalischen Bereich vorkommen mögen.

Entsprechend unserer Absicht, Entropiezunahme nicht zuzulassen, müßten wir auch darauf verzichten, Reibungserscheinungen zu berücksichtigen. Bezüglich der inneren Reibung der Plasmakomponenten werden wir so verfahren, aber die gegenseitige Reibung

[3] Ausnahme: V. A. Bailey, Aust. J. Sci. Res. A 1, 351 [1948].

[4] Schlüter (l.c.[2]) schätzt ab, daß bei einem Plasma, das sich in einem Gravitationsfeld im statischen Gleichgewicht befindet, die Ladungstrennung von der Größenordnung 10^{-35} ist. Obwohl Bedenken gegen diese Abschätzung bestehen, da sie eine unipolar positive Raumladung liefert und ferner eine Überschlagsrechnung zeigt, daß z. B. zwischen Sonnenoberfläche und äußerer Korona eine Potentialdifferenz von rund 1000 V liegen muß, zu deren Aufrechterhaltung eine um etwa 10 Zehnerpotenzen größere Ladungstrennung als der oben angegebene Wert nötig ist, bleibt die Ladungstrennung im statischen Fall praktisch unmerklich.

werden wir, eben nicht ganz konsequent, trotzdem mit einem geeigneten Näherungsansatz berücksichtigen und voraussetzen, daß entweder die hierbei eingehende Leitfähigkeit des Plasmas groß genug sei oder die in Rede stehenden Strömungsenergien klein genug seien, um keine nennenswerte Entropiezunahme hervorzurufen. Die Mitnahme der gegenseitigen Reibung, welche, wie bei den Umformungen in § 2 ersichtlich wird, als Ohmsche Dämpfung in Erscheinung tritt, erfolgt einmal, damit bei verschwindender Ladungstrennung die abgeleiteten Gleichungen in diejenigen der Magneto-Hydrodynamik des inkompressiblen Mediums (mit gegenseitiger Reibung) übergehen, und zweitens, weil für Zwecke einer späteren Arbeit die Dämpfung von Wellenbewegungen benötigt wird, die als spezielle Bewegungslösungen aus den allgemeinen Gleichungen folgen.

Nach diesen Vorbemerkungen schreiben wir nun die Grundgleichungen an, wobei wir wegen näherer Einzelheiten z. Tl. auf Schlüter[2] verweisen.

1. Es gilt entsprechend den Voraussetzungen für jede Plasmakomponente die adiabatische Zustandsgleichung

$$P_{\mathrm{j}} = N_0 \, k \, T_{0\mathrm{j}} \, (N_{\mathrm{j}}/N_0)^{\varkappa}, \quad \mathrm{j} = \mathrm{i}, \mathrm{e}, \tag{1}$$

die den Partialdruck P_{j} als Funktion der Dichte N_{j} liefert, mit k = Boltzmann-Konstante, $T_{0\mathrm{j}}$ = Ruhe-Temperatur bei der Dichte N_0, $\varkappa$ = adiabatischer Polytropenexponent ($=5/3$ für einatomige Gase). $\varkappa$ werde im folgenden als für beide Komponenten gleich vorausgesetzt. Zustandsänderungen durch Ionisations- und Rekombinationsprozesse sollen nicht eintreten.

2. Die Eulersche Bewegungsgleichung für ein Volumenelement mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{\mathrm{i}}$ eines kompressiblen Ionengases der Elementarladung $+e$ und der Teilchenmasse m_{i} lautet

$$N_{\mathrm{i}} \, m_{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + N_{\mathrm{i}} \, N_{\mathrm{e}} \, \alpha \, (\mathfrak{v}_{\mathrm{i}} - \mathfrak{v}_{\mathrm{e}}) = N_{\mathrm{i}} \, e \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_{\mathrm{i}}}{c} \, \mathfrak{H} \right] \right\} - \operatorname{grad} P_{\mathrm{i}} + N_{\mathrm{i}} \, m_{\mathrm{i}} \, \mathfrak{g}_{\mathrm{i}} \, ; \tag{2}$$

$\mathrm{d}\mathfrak{v}/\mathrm{d}t$ ist dabei die substantielle Beschleunigung $= \partial\mathfrak{v}/\partial t + (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \, \mathfrak{v}$, das zweite Glied ist die Reibungskraft, welche dem Produkt der Dichten und der lokalen Geschwindigkeiten von Ionen und Elektronen proportional angesetzt wurde. Der Reibungskoeffizient α hängt mit den Stoßzahlen der Teilchen zusammen, wie dies näher bei Schlüter (l. c.[2]) nachzulesen ist. Auf der rechten Seite stehen die antreibenden Kräfte, repräsentiert durch die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, die Lorentz-Kraft $\left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \, \mathfrak{H} \right]$, den Druckgradienten und schließlich eine weitere Kraft $N \, m \, \mathfrak{g}$, die alle außer den vorgenannten wichtigen Kräften sonst noch auf das Volumenelement einwirkenden Kräfte bezeichnen möge, etwa die Gravitation.

Eine entsprechende Bewegungsgleichung gilt für die Elektronen (Elementarladung $-e$)

$$N_{\mathrm{e}} \, m_{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\,t} + N_{\mathrm{e}} \, N_{\mathrm{i}} \, \alpha \, (\mathfrak{v}_{\mathrm{e}} - \mathfrak{v}_{\mathrm{i}}) = - N_{\mathrm{e}} \, e \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_{\mathrm{e}}}{c} \, \mathfrak{H} \right] \right\} - \operatorname{grad} P_{\mathrm{e}} + N_{\mathrm{e}} \, m_{\mathrm{e}} \, \mathfrak{g}_{\mathrm{e}} \, . \tag{3}$$

3. Für das kompressible Plasma gelten zwei Kontinuitätsgleichungen

$$\operatorname{div} N_{\mathrm{j}} \, \mathfrak{v}_{\mathrm{j}} + \partial N_{\mathrm{j}} / \partial t = 0 \quad \text{mit } \mathrm{j} = \mathrm{i}, \mathrm{e} \, . \tag{4}$$

4. Hinzu kommen die Maxwellschen Gleichungen, wobei wir das Plasma als magnetisch nicht polarisierbar ansehen:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \partial \mathfrak{H} / \partial t \, , \tag{5}$$

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4 \pi \, \mathfrak{j} + \partial \mathfrak{E} / \partial t \, , \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4 \pi \, e \, (N_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{e}}) \, , \tag{7}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \, , \tag{8}$$

$$\mathfrak{j} = e \, (N_{\mathrm{i}} \, \mathfrak{v}_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{e}} \, \mathfrak{v}_{\mathrm{e}}) \, ; \tag{9}$$

$\mathfrak{j}$ ist hierin die Stromdichte.

Die elektrodynamische Kontinuitätsgleichung ist bereits in (4) enthalten.

§ 2. Umformung der Grundgleichungen und Reduktion der Zahl der Variablen

Die Gln. (1) bis (9) implizieren 9 variable Größen, abgesehen von den $\mathfrak{g}_{\mathrm{j}}$, nämlich $\mathfrak{v}_{\mathrm{i}}$, $\mathfrak{v}_{\mathrm{e}}$, N_{i}, N_{e}, P_{i}, P_{e}, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{j}$. (Die variablen Temperaturen sind durch Voraussetzung der Adiabasie bereits eliminiert.) Der Verminderung der Zahl der Variablen und der Gleichungen steht hinderlich entgegen, daß letztere z. Tl. nichtlinear sind. Wir müssen daher einige der Gln. (1) bis (9) vereinfachen. Dabei soll so verfahren werden, daß im Grenzfall verschwindender Druck- und Dichteschwankungen das aus (1) bis (9) hervorgehende Gleichungssystem auch bei beliebig großen Amplituden der übrigen Größen streng gültig bleibt. Insbesondere behalten wir damit die strenge Gültigkeit für den inkompressiblen Fall bei, sofern die Druck-Dichte-Beziehung (1) fallen gelassen wird und P_i, P_e als in diesem Fall a priori nicht weiter festzulegende d'Alembertsche Zwangskraftgrößen in den nachfolgenden Umformungen stehen bleiben. Wir beschränken uns also auf nicht zu große Dichteschwankungen und führen hier eine Vereinfachung durch, die der akustischen Näherung in der gewöhnlichen Hydrodynamik entspricht.

Es sei

$$N_j = N_0 (1 + u_j), \quad j = i, e \tag{10}$$

mit $|u_j|$ hinreichend klein gegen 1. Die Größen u_j hängen unmittelbar mit der Ladungstrennung zusammen, wenn diese durch $(N_i - N_e)/(N_i + N_e)$ definiert wird. Diese ist dann in der hier betrachteten Näherung gleich $^1/_2(u_i - u_e)$. Aus (4) wird unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}_j + \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 . \tag{11}$$

(9) geht über in

$$\mathfrak{j} = e N_0 (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_e) . \tag{12}$$

In (2) und (3) werden wir im Reibungsglied $N_j = N_0$ setzen und den nach Division mit N_j entstehenden Ausdruck $1/N_j \cdot \operatorname{grad} P_j$ nach Entwicklung von (1) schreiben

$$\frac{1}{N_j} \operatorname{grad} P_j = \varkappa k T_{0j} \operatorname{grad} u_j . \tag{13}$$

Wir führen nun mit Schlüter (l. c.[2]) eine neue Variable $\mathfrak{v}$, die „Plasmageschwindigkeit" über den Impuls eines Trägerpaares ein

$$(m_i + m_e)\, \mathfrak{v} = m_i \mathfrak{v}_i + m_e \mathfrak{v}_e \tag{14}$$

oder mit der Abkürzung $q = m_i/m_e$ für das Massenverhältnis,

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{q+1} (q\, \mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_e) . \tag{14a}$$

Gln. (2) und (3) werden nun nach Multiplikation mit geeigneten Faktoren additiv so kombiniert, daß an Stelle von $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{v}_e$ jetzt die Plasmageschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Stromdichte $\mathfrak{j}$ nach (12) erscheinen. Statt der Stromdichte selbst werden wir jedoch die Variable $\mathfrak{J}$ durch

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{j}/e N_0 (q+1) \tag{15}$$

einführen, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Unter Anwendung der Vektorformel

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = [\mathfrak{a} \operatorname{rot} \mathfrak{b}] + (\mathfrak{a} \operatorname{grad}) \mathfrak{b} + [\mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{a}] + (\mathfrak{b} \operatorname{grad}) \mathfrak{a}$$

entstehen damit Gln. (16) und (17):

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathfrak{v}^2 + q\, \mathfrak{J}^2) - [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] - q\, [\mathfrak{J} \operatorname{rot} \mathfrak{J}] = \frac{e}{m_e c} [\mathfrak{J}\, \mathfrak{H}] - \frac{1}{m_e (q+1)} \left(\frac{\operatorname{grad} P_i}{N_i} + \frac{\operatorname{grad} P_e}{N_e} \right) + \frac{q\, \mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}_e}{q+1} , \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} &+ \operatorname{grad} \left(\mathfrak{v} - \frac{q-1}{2} \mathfrak{J}, \mathfrak{J} \right) - [\mathfrak{J} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] \\ &- [\mathfrak{v} - (q-1)\, \mathfrak{J}, \operatorname{rot} \mathfrak{J}] + \frac{q+1}{q} \frac{\omega_e^2}{4 \pi \sigma} \mathfrak{J} \\ &= \frac{e}{m_e c q} \left\{ c\, \mathfrak{E} + [\mathfrak{v} - (q-1)\, \mathfrak{J}, \mathfrak{H}] \right\} \\ &- \frac{1}{m_e (q+1)} \left(\frac{\operatorname{grad} P_i}{q N_i} - \frac{\operatorname{grad} P_e}{N_e} \right) + \frac{\mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}_e}{q+1} . \end{aligned} \tag{17}$$

Darin haben wir

$$\frac{4 \pi e^2 N_0}{m_e} = \omega_e^2$$

gesetzt, das ist das Quadrat der Langmuirschen Elektronenplasmafrequenz. Ferner haben wir mit $\sigma = e^2/\alpha$ die Leitfähigkeit des Plasmas eingeführt. Gl. (17) reduziert sich in bekannter Weise auf das Ohmsche Gesetz $\mathfrak{j} = \sigma \mathfrak{E}$, wenn alle Glieder bis auf die unmittelbar zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehenden verschwinden.

Für den kompressiblen Fall haben wir nun in (16) und (17) die Glieder $\operatorname{grad} P_j/N_j$ durch (13) zu ersetzen. Die damit auftretende Größe u_j werden wir mit Hilfe der linearen Gln. (11), (12), (14), (15) durch $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{J}$ bzw. deren Vektordifferentialoperatoren ausdrücken. Das führt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\operatorname{grad} P_{\substack{i\\e}}}{N_{\substack{i\\e}}} \right) = - \varkappa k T_{0 \substack{i\\e}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\mathfrak{v} \, {}^{+1\cdot}_{-q\cdot}\, \mathfrak{J} \right) . \tag{18}$$

Zur weiteren Reduktion der Variablen führen wir nun die elektromagnetischen Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{j}$ auf eine Potentialgröße $\mathfrak{A}$ in üblicher Weise zurück, der wir, wie schon vorher bei $\mathfrak{J}$, die Dimension einer Geschwindigkeit erteilen.

Wenn wir schreiben *

$$- \frac{\partial}{\partial t} \Phi = c \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

mit Φ als skalarem Potential, so gilt

$$\frac{e}{m_e c} \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} , \tag{19}$$

$$\frac{e}{m_e c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} , \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{4 \pi e}{m_e c^2} \mathfrak{j} &= (q+1) \frac{\omega_e^2}{c^2} \mathfrak{J} \\ &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} . \end{aligned} \tag{21}$$

* Siehe Begründung bei Sommerfeld, Theoretische Physik, Bd. III, § 19, Wiesbaden (1948).

Im hier weniger interessierenden Fall des Vorhandenseins äußerer statischer Felder hat man diese bei der zeitlichen Integration von (20) als Integrationskonstanten zu berücksichtigen.

Wir können nun die Gln. (18) bis (21) in (16) und (17) einfügen, nachdem wir letztere einmal partiell nach der Zeit differenziert haben, und hätten damit gezeigt, daß es möglich ist, bei der Beschreibung von Vorgängen im Plasma, abgesehen von den im allgemeinen unwesentlichen Gliedern $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_e$, mit nur zwei dreikomponentigen (Geschwindigkeits-) Vektoren auszukommen, deren Wechselwirkung durch zwei partielle Differentialgleichungen mit Ableitungen bis zur 4. Ordnung bestimmt ist. Der Übersichtlichkeit wegen werden wir jedoch die Ersetzung für $\mathfrak{J}$ nicht durchführen, sondern Gl. (21), die den Zusammenhang von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ vermittelt, für sich stehen lassen. Wenn wir noch die Abkürzungen

$$\vartheta = T_{0e}/T_{0i} \; (\geqq 1) \tag{22}$$

und

$$a^2 = \varkappa\, k\, T_{0i}/m_i \tag{23}$$

einführen, wobei letztere das Quadrat der „Ionenschallgeschwindigkeit" in Analogie zur gewöhnlichen Akustik ist, lauten die Gleichungen endgültig:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathfrak{v}^2 + q\,\mathfrak{J}) - [\mathfrak{v}, \operatorname{rot}\mathfrak{v}] - [\mathfrak{J}, \operatorname{rot}(q\,\mathfrak{J}+\mathfrak{A})] - \frac{q\,\mathfrak{g}_i+\mathfrak{g}_e}{q+1}\right\} - \frac{q}{q+1}\, a^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{(\vartheta+1)\,\mathfrak{v} - (q\,\vartheta-1)\,\mathfrak{J}\right\} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(q\,\mathfrak{J}+\mathfrak{A}) + q\operatorname{grad}\left(\mathfrak{v} - \frac{q-1}{2}\,\mathfrak{J}, \mathfrak{J}\right) - q\,[\mathfrak{J}, \operatorname{rot}\mathfrak{v}] - [\mathfrak{v} - (q-1)\,\mathfrak{J}, \operatorname{rot}(q\,\mathfrak{J}+\mathfrak{A})] + (q+1)\frac{\omega_e^2}{4\pi\sigma}\,\mathfrak{J} - q\frac{\mathfrak{g}_i-\mathfrak{g}_e}{q+1}\right\} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{c^2\,\mathfrak{A} - \frac{q}{q+1}\, a^2\big((q\,\vartheta-1)\,\mathfrak{v} - (q^2\,\vartheta+1)\,\mathfrak{J}\big)\right\} = 0 \tag{25}$$

mit $q = m_i/m_e$ und (21) als dem Zusammenhang zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$.

In diesen Gleichungen bringen die grad div-Glieder die Wirkung von Dichteschwankungen und Ladungstrennung zum Ausdruck. Treten letztere nicht auf oder sind sie zu vernachlässigen, so beschreiben die gleich Null gesetzten großen Klammern hinter den Zeitableitungssymbolen allgemeine Wirbelströmungen im Plasma.

Drei Bemerkungen müssen wir noch hinzufügen:

1. In der Anwendung obiger Gleichungen auf spezielle Strömungsprobleme können sich bei der Zerlegung in Komponentengleichungen einzelne Komponenten der in den Variablen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}$ oder deren Ableitungen nichtlinearen Ausdrücke als so klein erweisen, daß ihre Mitnahme nicht gerechtfertigt erscheint gegenüber den unter Voraussetzung nicht zu großer Ladungstrennung bereits bei der Ableitung der Gleichungen unterdrückten Anteilen höherer Ordnung in der Stromdichte $\mathfrak{j}$ bzw. $\mathfrak{J}$, die teilweise linear auftritt.

2. Wenn die negativen Ladungsträger Elektronen sind, ist $q = m_i/m_e$ eine gegenüber Eins sehr große Zahl. Die dann naheliegende Streichung von 1 in Ausdrücken wie $q-1$, $q\,\vartheta-1$ $(\vartheta \geqq 1)$ etc. ist *ohne* Beschränkung des Umfangs der durch die Gln. (24), (25), (21) beschriebenen möglichen Plasmaströmungen einzig *nur* beim Auftreten der Kombination $q+1$ statthaft. Die Zusammensetzung des Plasmas aus 2 (allgemeiner n) Komponenten führt zu einer Dualität (allgemeiner n-fachen Mannigfaltigkeit) der Lösungsmöglichkeiten der hydrodynamischen Gleichungen, die eng mit dem Auftreten der Ausdrücke $q-1$, $q\,\vartheta-1$, $q^2\,\vartheta+1$ etc. verknüpft ist. Es wird sich dies bereits in der folgenden Arbeit zeigen, besonders aber in einer späteren Anwendung dieses Gleichungssystems auf harmonische Wellenlösungen bei kleinen Amplituden von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{A}$.

3. Unter Vorwegnahme eines Resultats der folgenden Arbeit kann das Gleichungssystem (24), (25), (21) für $1 \leqq \vartheta \leqq 10$ als genügend streng gültig angesehen werden, solange man Strömungen zu betrachten hat, die bei durchgängiger Gültigkeit der adiabatischen Zustandsgleichung dem sogenannten „Ionenschallgebiet" zuzuordnen sind, da hier die bei der Ableitung der Gleichungen vorausgesetzte Kleinheit der Ladungstrennung und der Dichteschwankungen stets erfüllt ist. Hierbei ist das Ionenschallgebiet dadurch gekennzeichnet, daß merkliche Änderungen von $\mathfrak{v}$ und den übrigen Plasmagrößen nicht in wesentlich kürzeren Zeiten als der reziproken Ionenplasmafrequenz $\omega_i = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m_i}$ erfolgen. Die Eins kann dann neben q, $q\,\vartheta$ etc. gestrichen werden.

Herrn Prof. G. Burkhardt danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.